DEIMOS
OPOSICIONES A PROFESORES DE SECUNDARIA
Y DIPLOMADOS EN ESTADÍSTICA DEL ESTADO
C.I.F. B41097270
C/ Guzmán el Bueno, 52, 1º Izda.
(Metro : Islas Filipinas y Moncloa)
☎ 91 543 82 14 – 669 31 64 06
28015 MADRID
www.deimos-es.com
editorial@deimos-es.com

PROBLEMAS DE OPOSICIONES
MADRID (25/06/2010)

PROBLEMA 1.

a) Dado un triángulo ABC de ángulos agudos, hállese un punto P tal que la suma de sus distancias a los vértices A, B y C sea la menor posible.

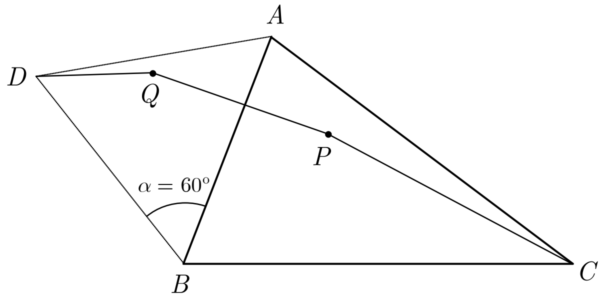
b) Sobre los lados del triángulo ABC se forman triángulos equiláteros BCA', CAB' y ABC' construidos hacia fuera del mismo. Demuestre que los segmentos rectilíneos AA', BB' y CC' son iguales, que concurren en un mismo punto y que forman entre sí ángulos de 60º.

Este problema figura resuelto en la página 61 del [Vol. 2] de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. Pueden consultarse también las páginas 611 y 612 del mismo volumen.

Solución:

a) Denotemos por g el giro de centro B y ángulo 60º, y sea $D = g(A)$, como se indica en la figura. Obsérvese que el triángulo ABD es equilátero, pues $BA = BD$ y el ángulo en el vértice B mide 60º. Ahora, para cualquier punto P denotamos $Q = g(P)$, con lo que también el triángulo PBQ es equilátero, pues $BP = BQ$ y el ángulo en el vértice B mide 60º.

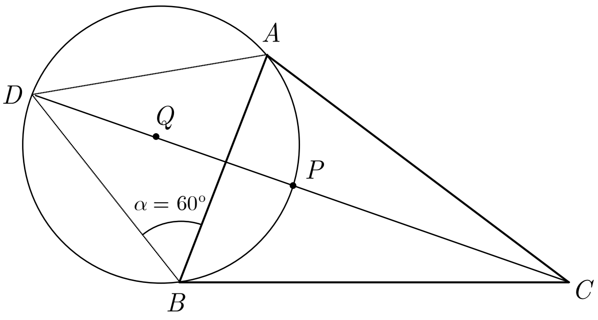
Como los giros preservan la distancia, $PA = QD$, lo que junto con lo anterior nos dice que la suma de distancias de P a los vértices A, B y C vale



$$d(P) = PA + PB + PC = DQ + QP + PC$$

que es la longitud de línea quebrada de la figura. En consecuencia, el punto P para el que esta cantidad es mínima es aquél para el que esta línea quebrada es una recta. Por tanto, habrá que tomar P sobre la recta r_C que une C y D.

Veamos qué más condiciones ha de cumplir el punto P, para lo que analizamos la siguiente figura, en la que P ya está situado sobre la recta r_C. La clave radica en observar que puesto que los giros preservan ángulos y el triángulo PBQ es equilátero, se tiene



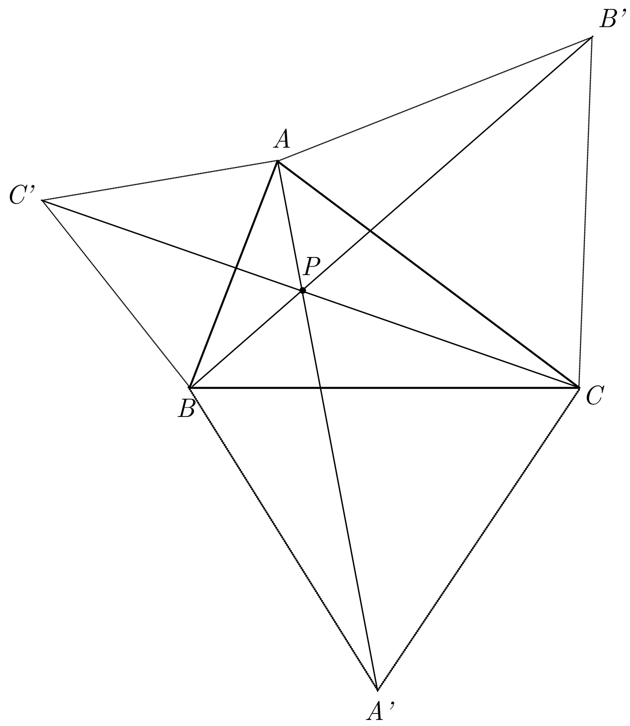
$$\measuredangle APB = \measuredangle DQB = 180^o - \measuredangle PQB = 120^o$$

Como $\measuredangle ADB = 60^o$, por ser el triángulo ABD equilátero, resulta que

$$\measuredangle APB + \measuredangle ADB = 120^o + 60^o = 180^o$$

luego los ángulos con los que se ve el segmento AB desde D y P son suplementarios. Esto supone que P pertenece a la circunferencia Γ que pasa por A, B y D. Esta circunferencia corta a la recta r_C que une C con D en los puntos D y P, luego $P = \Gamma \cap (r_C - \{D\})$ es el punto buscado.

b) En la construcción anterior, denotamos $D = C'$. Hemos probado que el punto P que minimiza la suma de distancias a los vértices A, B y C pertenece a la recta r_C que une C con C'. Más aún, se ha demostrado que dicha suma de distancias vale $d(P) = CC'$. Como los roles de los vértices del triángulo de partida son intercambiables deducimos que, con las notaciones de este apartado, el punto P también pertenece a las rectas r_A y r_B que unen A con A' y B con B'. Esto proporciona una construcción alternativa del punto P, pues $P = r_A \cap r_C$, y en particular prueba que los segmentos AA', BB' y CC' son concurrentes. Además demuestra una de las igualdades pedidas en este apartado ya que, por simetría, $AA' = BB' = CC' = d(P)$. Por último, recordemos que en a) se probó que $\measuredangle APB = 120^o$, luego $\measuredangle(r_A, r_B) = \measuredangle BPA' = 60^o$. Por la misma razón, $\measuredangle(r_A, r_C) = \measuredangle(r_B, r_C) = 60^o$, como queríamos probar.



OBSERVACIÓN

Si se llama f a la función que asigna a cada punto del plano en el que se sitúa el triángulo ABC la suma de sus distancias a los vértices A, B y C, la construcción precedente muestra que si todos los ángulos del triángulo ABC son menores que 120^o, existe un punto P en el interior del triángulo que minimiza la restricción de f al interior del triángulo. Resulta, además, que en este punto se alcanza el mínimo de f en todo el plano. Este punto recibe el nombre de *punto de Fermat.*

Sin embargo, cabría preguntarse qué sucedería si alguno de los ángulos, digamos el ángulo en A, es mayor o igual que 120º. Si se repite en este caso la construcción anterior se obtiene como "solución", bien un punto Q exterior a la región encerrada por el triángulo, bien el propio A. En cualquiera de ambos casos, se comprueba que la función f es mínima en A, por lo que A es el punto solución del problema.

PROBLEMA 2.

Se considera la ecuación $x^{2n} - 1 = 0$, donde n es un número entero positivo.

a) Calcule sus raíces.

b) Demuestre que, para $x \neq \pm 1$ y $n > 1$, se cumple la igualdad:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right)$$

c) Aplicación: Halle el valor del producto $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}$

Este problema, en esencia, ha sido propuesto en varias convocatorias anteriores. Pueden consultarse las páginas 99 y 100 del [Vol. 3] y 452, 453, 454, 554 y 555 del [Vol. 2] de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

Solución:

a) Las soluciones en el campo complejo de la ecuación $x^{2n} = 1$ son las $2n$ raíces $2n$-ésimas de la unidad, a saber, los números complejos $x = e^{2k\pi i/2n} = e^{k\pi i/n}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Obsérvese que para $k = 0$ y $k = n$, se obtienen las raíces reales 1 y -1, y que las $2n-2$ raíces complejas restantes pueden agruparse en $n-1$ parejas de raíces conjugadas entre sí, por ser, para cada $k = 1, \ldots, n-1$:

$$e^{(2n-k)\pi i/n} = e^{2\pi i} \cdot e^{-k\pi i/n} = e^{-k\pi i/n} = \overline{e^{k\pi i/n}}$$

b) Según lo obtenido en el apartado a), el polinomio $x^{2n} - 1$ se descompone en $\mathbb{C}$ mediante:

$$x^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(x - e^{k\pi i/n}\right) = (x-1)(x+1)\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{2n-1}\left(x - e^{k\pi i/n}\right) = \left(x^2-1\right)\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{2n-1}\left(x - e^{k\pi i/n}\right)$$

Agrupando ahora según las parejas de raíces conjugadas como se indicó en a), podemos escribir:

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{k\pi i/n}\right)\left(x-e^{(2n-k)\pi i/n}\right)=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{k\pi i/n}\right)\left(x-e^{-k\pi i/n}\right)$$

Como es $\left(x-e^{k\pi i/n}\right)\left(x-e^{-k\pi i/n}\right)=x^2-x\left(e^{k\pi i/n}+e^{-k\pi i/n}\right)+1=x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1$, el producto anterior queda:

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

y de aquí se concluye que, si $x\neq\pm1$:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$

c) Tomando ahora límites cuando $x\to1$ en ambos miembros de la igualdad se obtiene:

- Para el primer miembro, con la ayuda de la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2nx^{2n-1}}{2x}=n$$

- Para el segundo, como es $1-\cos\frac{k\pi}{n}=1-\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n}-\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}\right)=2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$, resulta:

$$\lim_{x\to1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}=$$

$$=2^{2n-2}\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}$$

Si ahora igualamos el valor de ambos límites, se obtiene:

$$n=2^{2n-2}\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n},\qquad \text{es decir,}\qquad \prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{2n}=\frac{n}{2^{2n-2}}$$

y como es $\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2n}>0$ para cada $k=1,2,\dots,n-1$, resulta que:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2n}=\sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

PROBLEMA 3.

Se tienen tres bolsas conteniendo n bolas numeradas 1, 2, 3, …, n. Se extrae al azar una bola de cada bolsa y sean x, y, z los números de las bolas extraídas. Halle la probabilidad de que $x+y=z$.

Este problema figura resuelto en la página 172 del [Vol. 3] y en la 185 del [Vol. 2] de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos. También ha sido propuesto en Murcia 2006.

1ª solución

El espacio muestral asociado a este experimento es el conjunto Ω de ternas ordenadas (x,y,z) tales que $x,y,z\in\{1,2,\dots,n\}$, de modo que el número de casos posibles del experimento es $\operatorname{card}(\Omega)=n^3$.

Para determinar el número de casos favorables a que sea $x+y=z$, considérese que, por lo pronto, debe ser $z\in\{2,3,\dots,n\}$ y que, para cada uno de estos valores z, el par (x,y) sólo puede ser alguno de los $z-1$ pares $(1,z-1),(2,z-2),\dots,(z-1,1)$. Siendo así, el número total de casos favorables es:

$$\sum_{z=2}^{n}(z-1)=1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

La probabilidad que se pide es entonces:

$$p[x+y=z]=\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^3}=\frac{n-1}{2n^2}$$

2ª solución

Según el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que sea $x+y=z$ puede obtenerse como la suma:

$$p[x+y=z]=\sum_{k=1}^{n}p[z=k]\cdot p[x+y=z\,/\,z=k]=\sum_{k=1}^{n}p[z=k]\cdot p[x+y=k] \qquad (1)$$

Para $k=1$ es evidente que $p[x+y=1]=0$, mientras que si $k\in\{2,\dots,n\}$, teniendo en cuenta la independencia de las variables aleatorias x e y, es:

$$p[x+y=k]=\sum_{j=1}^{k-1}p[x=j,\ y=k-j]=\sum_{j=1}^{k-1}p[x=j]\cdot p[y=k-j]$$

Como las variables x, y, z son uniformes, $p[x=j]=p[y=k-j]=p[z=k]=\dfrac{1}{n}$, así es que:

$$p[x+y=k]=\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{n^2}=\frac{k-1}{n^2}$$

Sustituyendo en (1) se obtiene la probabilidad pedida, que es:

$$p[x+y=z]=\sum_{k=1}^{n} p[z=k]\cdot p[x+y=k]=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k-1)=\frac{n-1}{2n^2}$$

OBSERVACIÓN

Bajo otra interpretación, puede pensarse que la probabilidad pedida es la de que el número que figura en **una cualquiera** de las bolas extraídas sea la suma de los números que figuran en las otras dos bolas. Con esta suposición, el suceso cuya probabilidad se pide es el conjunto:

$$A=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\Omega:\ x_i=x_j+x_k,\ \text{donde } i,j,k\in\{1,2,3\}\ \text{con } i\neq j\neq k\right\}.$$

Como ya se ha dicho anteriormente, el número de casos favorables al suceso $[x_1+x_2=x_3]$ es $\frac{1}{2}n(n-1)$; que será el mismo número de casos favorables a los sucesos $[x_1+x_3=x_2]$ y $[x_2+x_3=x_1]$, y por lo tanto:

$$p(A)=\frac{3\cdot\frac{1}{2}n(n-1)}{n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}.$$

PROBLEMA 4.

Sea f una función real de variable real, $f\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, tal que

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=e^3$$

Calcule razonadamente $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$.

Este problema figura resuelto en la páginas 441, 442 y 443 del [Vol. 4] de Problemas de Oposiciones de Editorial Deimos.

Solución:

Para que el límite del enunciado tenga sentido debe ser, en un entorno reducido del origen, $1+x+\frac{f(x)}{x}>0$. Así, si se tiene en cuenta que, para cada $a>0$, es $a^b=e^{b\,\mathrm{L}\,a}$, podemos escribir dicho límite como:

$$e^3=\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}$$

de donde se deduce:

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}$$

y de aquí es inmediato que

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=0\cdot 3=0$$

o lo que es equivalente,

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1\,,\quad \text{lo que a su vez supone que}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

En consecuencia, por la continuidad de *f*, se tiene

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0\cdot 0=0$$

y, según esto,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

Para el cálculo de $f''(0)$, recurrimos a la fórmula de Mac-Laurin. Por ser $f\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, para cada $x\in\mathbb{R}$ existe c_x comprendido entre 0 y x tal que:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(c_x)}{3!}x^3$$

Como es $f(0)=f'(0)=0$, resulta, para cada $x\neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f''(0)}{2!}x+\frac{f'''(c_x)}{3!}x^2$$

y entonces

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f''(0)}{2!}x+\frac{f'''(c_x)}{3!}x^2\right)$$

Si reparamos ahora en que los infinitésimos $\mathrm{L}(1+z)$ y z son equivalentes cuando $z\to 0$ y en que $\lim_{x\to 0}f'''(c_x)=f'''(0)$ por ser $|c_x|<|x|$ y $f\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, el límite anterior puede escribirse como:

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(1+x+\frac{f''(0)}{2!}x+\frac{f'''(c_x)}{3!}x^2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{f''(0)}{2!}x+\frac{f'''(c_x)}{3!}x^2\right)=$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(c_x)}{3!}x\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot 0 = 1 + \frac{f''(0)}{2}$$

y de aquí que $f''(0) = 4$.